

η επίλυση των εξισώσεων 1^{ου} βαθμού



μετά από:

απαλοιφή παρονομαστών και παρενθέσεων
χωρισμό γνωστών από αγνώστους όρους
αναγωγή ομοίων όρων
η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$αx = β$$

για παράδειγμα...

1. $2x = 5$

$$x = \frac{5}{2} \quad (: \leftrightarrow :)$$

2. $\frac{x}{3} = \frac{5}{6}$

$$x = \frac{3 \cdot 5}{6} \quad (: \leftrightarrow :)$$

$$x = \frac{5}{2}$$

3. $3x - 2 = x + 10$

$$3x - x = 10 + 2 \quad \text{χωρισμός γνωστών-αγνώντων } (+ \leftrightarrow -)$$

$$2x = 12 \quad \text{αναγωγή ομοίων όρων}$$

$$x = \frac{12}{2} \quad (: \leftrightarrow :)$$

$$x = 6$$

4. $2(3-x)+5 = 5x+1$

$$6-2x+5 = 5x+1 \quad \text{απαλοιφή παρενθέσεων}$$

$$-2x-5x = 1-6-5 \quad \text{χωρισμός γνωστών-αγνώντων } (+ \leftrightarrow -)$$

$$-7x = -10 \quad \text{αναγωγή ομοίων όρων}$$

$$x = \frac{10}{7} \quad (: \leftrightarrow :)$$



5. $2(2x-1) = 4(x+1)$

$$4x-2 = 4x+4 \quad \text{απαλοιφή παρενθέσεων}$$

$$4x-4x = 4+2 \quad \text{χωρισμός γνωστών-αγνώντων } (+ \leftrightarrow -)$$

$$0x = 6 \quad \text{αναγωγή ομοίων όρων}$$

η εξίσωση είναι **αδύνατη** δηλ. δεν επαληθεύεται από **κανέναν αριθμό x** (καμία λύση)

6. $4-2x = -2(x-2)$

$$4-2x = -2x+4 \quad \text{απαλοιφή παρενθέσεων}$$

$$-2x+2x = 4-4 \quad \text{χωρισμός γνωστών-αγνώντων } (+ \leftrightarrow -)$$

$$0x = 0 \quad \text{αναγωγή ομοίων όρων}$$

η εξίσωση είναι **αόριστη** (ταυτότητα) δηλ. επαληθεύεται από **κάθε αριθμό x** (άπειρες λύσεις)

$$7. \quad \frac{x+1}{3} = \frac{2-x}{5}$$

$$5(x+1) = 3(2-x) \quad \text{απαλοιφή παρονομαστών (χιαστί) } (\cdot \leftrightarrow :)$$

$$5x + 5 = 6 - 3x \quad \text{απαλοιφή παρενθέσεων}$$

$$5x + 3x = 6 - 5 \quad \text{χωρισμός γνωστών-αγνώστων } (+ \leftrightarrow -)$$

$$8x = 1 \quad \text{αναγωγή ομοίων όρων}$$

$$x = \frac{1}{8} \quad (\cdot \leftrightarrow :)$$



$$8. \quad \frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$$

$$20\left(\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4}\right) = 20\left(\frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}\right) \quad \text{απαλείφουμε τους παρονομαστές πολλαπλασιάζοντας με ΕΚΤ(4,5,20) δηλ. με 20}$$

$$4(1-4x) - 5(x+1) = x-4+25$$

$$4 - 16x - 5x - 5 = x + 21 \quad \text{απαλοιφή παρενθέσεων}$$

$$-16x - 5x - x = 21 - 4 + 5 \quad \text{χωρισμός γνωστών-αγνώστων } (+ \leftrightarrow -)$$

$$-22x = 22 \quad \text{αναγωγή ομοίων όρων}$$

$$x = \frac{22}{-22} \quad (\cdot \leftrightarrow :)$$

$$x = -1$$

παραδείγματα επίλυσης εξισώσεων που η επίλυσή τους
ανάγεται σε επίλυση πρωτοβαθμίων εξισώσεων



$$9. \quad |x+2| = 0$$

$$x+2 = 0$$

$$x = -2$$

$$10. \quad |x+5| = 7$$

$$x+5 = 7 \quad \text{ή} \quad x+5 = -7$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -12$$

$$11. \quad (x-2)^2 = 9$$

$$x-2 = 3 \quad \text{ή} \quad x-2 = -3$$

$$x = 5 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

$$12. \quad (x-1)(2x-1)(x+2) = 0$$

$$x-1 = 0 \quad \text{ή} \quad 2x-1 = 0 \quad \text{ή} \quad x+2 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = -2$$



η επίλυση των ανισώσεων 1^{ου} βαθμού

μετά από:

απαλοιφή παρονομαστών και παρενθέσεων
χωρισμό γνωστών από αγνώστους όρους
αναγωγή ομοίων όρων
η ανίσωση παίρνει τη μορφή:

$$ax < \beta \quad \text{ή} \quad ax \leq \beta \quad \text{ή} \quad ax > \beta \quad \text{ή} \quad ax \geq \beta$$

για παράδειγμα...

1.
$$3x-2 \leq 2+7x$$

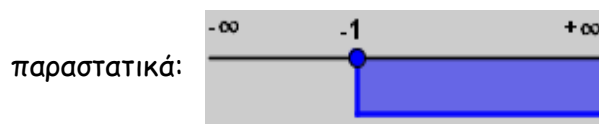
$$3x-7x \leq 2+2$$

$$-4x \leq 4$$

$$x \geq \frac{4}{-4}$$

$$x \geq -1$$

Λύσεις της ανίσωσης είναι οι (άπειροι) αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του -1



2.
$$2(s+3) < 5$$

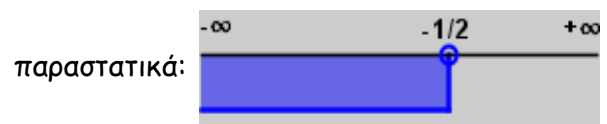
$$2s+6 < 5$$

$$2s < 5-6$$

$$2s < -1$$

$$s < -1/2$$

Λύσεις της ανίσωσης είναι οι (άπειροι) αριθμοί που είναι μικρότεροι του -1/2



3.
$$5x+1 > 5(x-2)$$

$$5x+1 > 5x-10$$

$$5x-5x > -10-1$$

$$0x > -11$$

Λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι αριθμοί γιατί αυτή αληθεύει για κάθε αριθμό x

4.
$$6(1-x) < 3(1-2x)$$

$$6-6x < 3-6x$$

$$-6x+6x < 3-6$$

$$0x < -3$$

η ανίσωση είναι **αδύνατη** γιατί δεν αληθεύει για κανέναν αριθμό x

5.
$$3(x-1)+2 \leq 4-(5-3x)$$

$$3x-3+2 \leq 4-5+3x$$

$$3x-3x \leq 4-5+3-2$$

$$0x \leq 0$$

Λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι αριθμοί αφού αυτή αληθεύει ως ισότητα για κάθε αριθμό x

6.
$$2-5x > 12-5(2+x)$$

$$2-5x > 12-10-5x$$

$$-5x+5x > 12-10-2$$

$$0x > 0$$

η ανίσωση είναι **αδύνατη** γιατί δεν αληθεύει για κανέναν αριθμό x

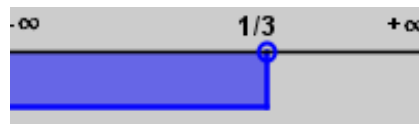
7.

$$\begin{aligned} \frac{2(1-3x)}{5} - \frac{x+1}{2} &> x - 1 \\ 10\left(\frac{2(1-3x)}{5} - \frac{x+1}{2}\right) &> 10(x - 1) \\ 4(1-3x) - 5(x+1) &> 10x - 10 \\ 4 - 12x - 5x - 5 &> 10x - 10 \\ -12x - 5x - 10x &> -10 - 4 + 5 \\ -27x &> -9 \\ x &< \frac{-9}{-27} \\ x &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$



λύσεις της ανίσωσης είναι οι (άπειροι) αριθμοί που είναι μικρότεροι του $\frac{1}{3}$

παραστατικά:

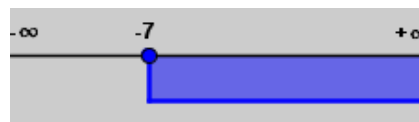


8.

$$\begin{aligned} \frac{5t}{2} + 3 &\geq \frac{t+3}{8} + 2t \\ 8\left(\frac{5t}{2} + 3\right) &\geq 8\left(\frac{t+3}{8} + 2t\right) \\ 20t + 24 &\geq t + 3 + 16t \\ 20t - t - 16t &\geq 3 - 24 \\ 3t &\geq -21 \\ t &\geq \frac{-21}{3} \\ t &\geq -7 \end{aligned}$$

λύσεις της ανίσωσης είναι οι (άπειροι) αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του - 7

παραστατικά:

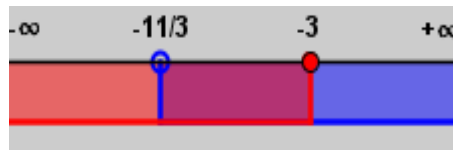




παραδείγματα επίλυσης συστημάτων ανισώσεων 1^{ου} βαθμού

<p>1. $6(x+2) \leq x-3$ $6x+12 \leq x-3$ $6x-x \leq -3-12$ $5x \leq -15$ $x \leq -3$</p>	<p>και και και και και</p>	<p>$2x-1 < 5(x+2)$ $2x-1 < 5x+10$ $2x-5x < 10+1$ $-3x < 11$ $x > -\frac{11}{3}$</p>
---	--	---

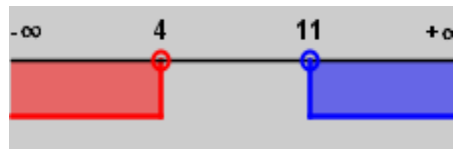
παραστατικά:



άρα **λύσεις** του συστήματος είναι όλοι οι αριθμοί x με: $-11/3 < x \leq -3$

<p>2. $3x-5 < x+3$ $3x-x < 3+5$ $2x < 8$ $x < 4$</p>	<p>και και και και</p>	<p>$2x-1 > x+10$ $2x-x > 10+1$ $x > 11$ $x > 11$</p>
---	------------------------------------	---

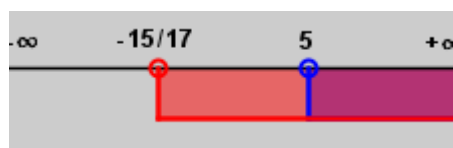
παραστατικά:



άρα το σύστημα είναι **αδύνατο** αφού οι ανισώσεις **δεν συναληθεύουν**

<p>3. $\frac{2x-1}{3} > \frac{x+1}{2}$ $2(2x-1) > 3(x+1)$ $4x-2 > 3x+3$ $4x-3x > 3+2$ $x > 5$</p>	<p>και και και και και</p>	<p>$\frac{x-1}{2} - \frac{x}{5} < 2x+1$ $10(\frac{x-1}{2} - \frac{x}{5}) < 10(2x+1)$ $5(x-1) - 2x < 20x+10$ $5x-2x-20x < 10+5$ $x > -\frac{15}{17}$</p>
---	--	---

παραστατικά:



άρα **λύσεις** του συστήματος είναι όλοι οι αριθμοί x με: $x > 5$



4.

η **διπλή ανίσωση**:

$$x+1 \leq 2x-1 < 3x$$

σημαίνει:

$$x+1 \leq 2x-1$$

$$-x \leq -2$$

$$x \geq 2$$

και

και

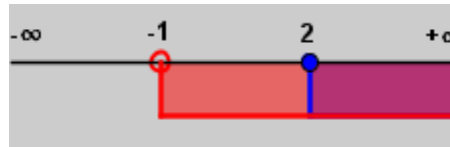
και

$$2x-1 < 3x$$

$$-x < 1$$

$$x > -1$$

παραστατικά:



άρα **λύσεις** του συστήματος είναι όλοι οι αριθμοί x με: $x \geq 2$

5.

$$-1 < \frac{1-3x}{2} \leq 3$$

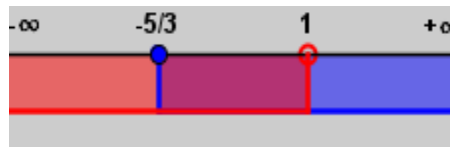
$$-2 < 1-3x \leq 6$$

$$-3 < -3x \leq 5$$

$$1 > x \geq -\frac{5}{3}$$

$$-\frac{5}{3} \leq x < 1$$

παραστατικά:



6.

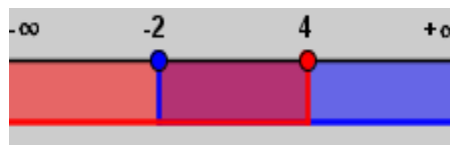
$$|x-1| \leq 3$$

για να απέχει ο αριθμός $x-1$ από το 0 απόσταση μικρότερη ή ίση του 3 πρέπει:

$$-3 \leq x-1 \leq 3$$

$$-2 \leq x \leq 4$$

παραστατικά:





και προβλήματα...

με εξισώσεις

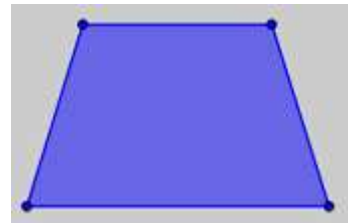
διαβάζω πολλές φορές το πρόβλημα...
 ξεχνάω προς το παρόν τις μονάδες μέτρησης
 αφού όμως πρώτα τις κάνω ίδιες...
 εντοπίζω έναν άγνωστο και τον βαπτίζω (π.χ. x)...
 ονομάζω τους άλλους αγνώστους (αν υπάρχουν) χρησιμοποιώντας τον x...
 εκφράζω μία ποσότητα με δύο τρόπους...
 εξισώνω... (Do you speak Greek?)
 λύνω την εξίσωση...
 ελέγχω αν η λύση ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος...
 ελέγχω αν η λύση είναι λογικά αποδεκτή!

με ανισώσεις

παρομοίως...
 και σιγά σιγά, μικρός(ή) είσαι ακόμη...

για παράδειγμα...

1. Το τραπέζιο του σχήματος έχει περίμετρο 23cm.
 Η βάση του είναι κατά 0.3dm μεγαλύτερη από κάθε μία από τις άλλες
 τρεις πλευρές που είναι ίσες μεταξύ τους.
 Να βρεις τα μήκη των πλευρών του τραπέζιου.



Λύση:

έστω xcm το μήκος καθεμιάς από τις ίσες πλευρές
 η βάση είναι x+3cm (0.3dm=3cm!)

η περίμετρος είναι: $x+x+x+(x+3)$

η περίμετρος είναι: 23

} συνεπώς: $x+x+x+(x+3)=23$
 $4x+3=23$
 $4x=20$
 $x=5$

$5+5+5+8=23$

άρα τα μήκη των πλευρών του τραπέζιου είναι 5cm, 5cm, 5cm και 8cm.

2. Ένας οινοπαραγωγός ανάμιξε 200l κρασιού περιεκτικότητας 10% σε καθαρό οινόπνευμα με 300l κρασιού περιεκτικότητας 12% σε καθαρό οινόπνευμα. Ποια είναι η επί τοις εκατό περιεκτικότητα σε οινόπνευμα του κρασιού που έφτιαξε;

Λύση:

έστω $x\%$ η ζητούμενη περιεκτικότητα

η ποσότητα του οινοπνεύματος πριν τη μίξη είναι: $\frac{10}{100} 200 + \frac{12}{100} 300$

η ποσότητα του οινοπνεύματος μετά τη μίξη είναι: $\frac{x}{100} (200+300)$

η συνολική ποσότητα όμως του οινοπνεύματος πριν και μετά τη μίξη παραμένει σταθερή, συνεπώς:

$$\frac{10}{100} 200 + \frac{12}{100} 300 = \frac{x}{100} (200+300)$$

$$2000 + 3600 = 500x$$

$$x = \frac{5600}{500} = 11.2$$

άρα η περιεκτικότητα σε οινόπνευμα του κρασιού που έφτιαξε είναι 11.2%

3. Ένα φορτηγό με απόβαρο 2800kg πρέπει να περάσει μία γέφυρα που αντέχει βάρος μέχρι 5t φορτωμένο με δοχεία λαδιού των 9kg. Πόσα το πολύ δοχεία μπορεί να μεταφέρει;

Λύση:

έστω x ο αριθμός των δοχείων που θα μεταφέρει το φορτηγό,

τότε το μικτό βάρος (δηλ. απόβαρο + φορτίο) θα είναι $2800+9x$

και θα πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο με τα 5000kg που αντέχει η γέφυρα ($5t=5000kg$)

συνεπώς πρέπει: $2800+9x \leq 5000$

$$9x \leq 2200$$

$$x \leq \frac{2200}{9} \approx 244.4$$

άρα μπορεί να μεταφέρει το πολύ 244 δοχεία

4. Στο Γυμνάσιο ένας μαθητής προάγεται σε ένα μάθημα όταν ο μέσος όρος των βαθμών του στα τρία τρίμηνα και τη γραπτή εξέταση του Ιουνίου είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 9.5. Ένας αστέρας μαθητής έχει στα μαθηματικά 9, 10 και 11 στο 1^ο, 2^ο και 3^ο τρίμηνο αντίστοιχα. Πόσο τουλάχιστον πρέπει να γράψει τον Ιούνιο στα μαθηματικά για να περάσει το μάθημα;

Λύση:

έστω x ο βαθμός του μαθητή στη γραπτή εξέταση,

τότε ο μέσος όρος της βαθμολογίας του θα είναι $\frac{9+10+11+x}{4}$



και θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 9.5

συνεπώς πρέπει: $\frac{9+10+11+x}{4} \geq 9.5$

$$30+x \geq 38$$

$x \geq 8$ άρα ο μαθητής πρέπει να γράψει τουλάχιστον 8 για να περάσει

σειρά σου τώρα...



✎ 1. Λύσε τις ακόλουθες εξισώσεις:

i. $3(x-2)-5x=4x+2(1-3x)$

ii. $6(3x+1)=3(6x+2)$

iii. $\frac{x-59}{3} = \frac{x}{5}$

iv. $\frac{1-3x}{5} = \frac{x+3}{2}$

v. $\frac{2x+1}{2} - \frac{x-3}{8} = 1 + \frac{3x-2}{3}$

vi. $\frac{3x+1}{4} + \frac{1-x}{3} = \frac{x}{6} - 1$

✎ 2. Λύσε τις ακόλουθες εξισώσεις:

i. $(2-3x)(x+3)=0$

ii. $|5x+1|=9$

iii. $(x+1)^2=1$

✎ 3. Λύσε τις ακόλουθες ανισώσεις:

i. $3(1-x)-2(x-3) \geq 5(3-x)$

ii. $7-x-2(4-x) < 3(2x-1)$

iii. $2(x-3)-3(x+1) < 2-x$

iv. $3x - \frac{2-5x}{4} > \frac{x+2}{2}$

v. $\frac{x}{2} \leq \frac{x}{7}$

vi. $2 + \frac{3-x}{5} > \frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{2}$

✎ 4. Λύσε τα ακόλουθα συστήματα ανισώσεων:

i. $3-(1-4x) > 3x+5$

και $2(x-3) \leq 5-x$

ii. $1 - \frac{x-3}{3} < 2 + \frac{1-x}{2}$

και $\frac{x-1}{3} \leq \frac{5-x}{2}$

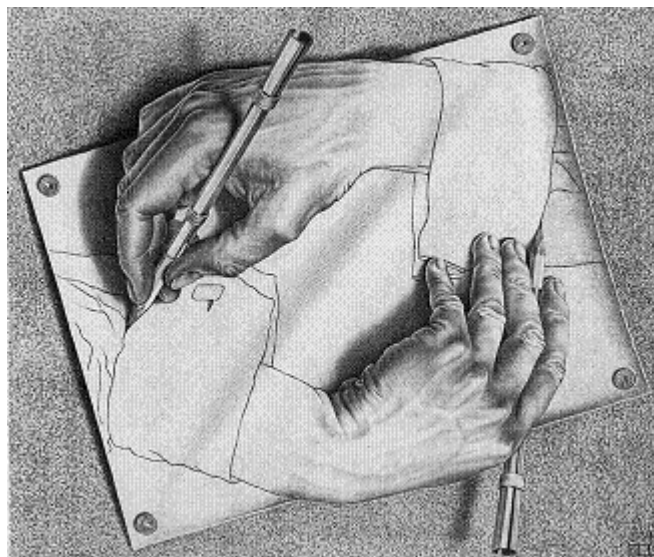
iii. $2x - (3 - \frac{1-x}{4}) < \frac{7x-1}{2}$

και $x - \frac{2x-1}{3} \leq -1$

iv. $2x+1 \leq \frac{x-2}{3} < 1-x$

v. $-8 \leq \frac{5x-4}{3} < 2$

- ✎ 5. Ο πατέρας του Πέτρου τον γέννησε όταν ήταν 31 ετών.
Σήμερα ο Πέτρος είναι 14 ετών.
Μετά από πόσα χρόνια θα γίνει η ηλικία του πατέρα διπλάσια από την ηλικία του Πέτρου;
- ✎ 6. Η γωνία της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι κατά 15° μικρότερη από καθεμία από τις γωνίες της βάσης του τριγώνου. Να βρεις όλες τις γωνίες του τριγώνου.
- ✎ 7. Ένα ξενοδοχείο έχει συνολικά 50 μονόκλινα και δίκλινα δωμάτια με 92 συνολικά κρεβάτια.
Πόσα μονόκλινα δωμάτια έχει το ξενοδοχείο;
- ✎ 8. Μία μεταβλητή x παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του -1 .
Μία άλλη μεταβλητή y είναι ίση με $-2x+3$.
Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή y ;
- ✎ 9. Βρες όλους τους αριθμούς που αν τους μειώσουμε κατά 2 και τους τοποθετήσουμε στον άξονα των αριθμών θα απέχουν από το 0 απόσταση μικρότερη από 4.
- ✎ 10. Βρες όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το 15, μικρότεροι από το 41 και αν διαιρεθούν με το 7 αφήνουν υπόλοιπο 3.



M.C. Escher (1898-1972)

drawing hands (1948)