η ευθεία (ε): Αx+Βy+Γ =0 (όπου: Α≠0 ή Β≠0)…

✍ ειδικές μορφές:

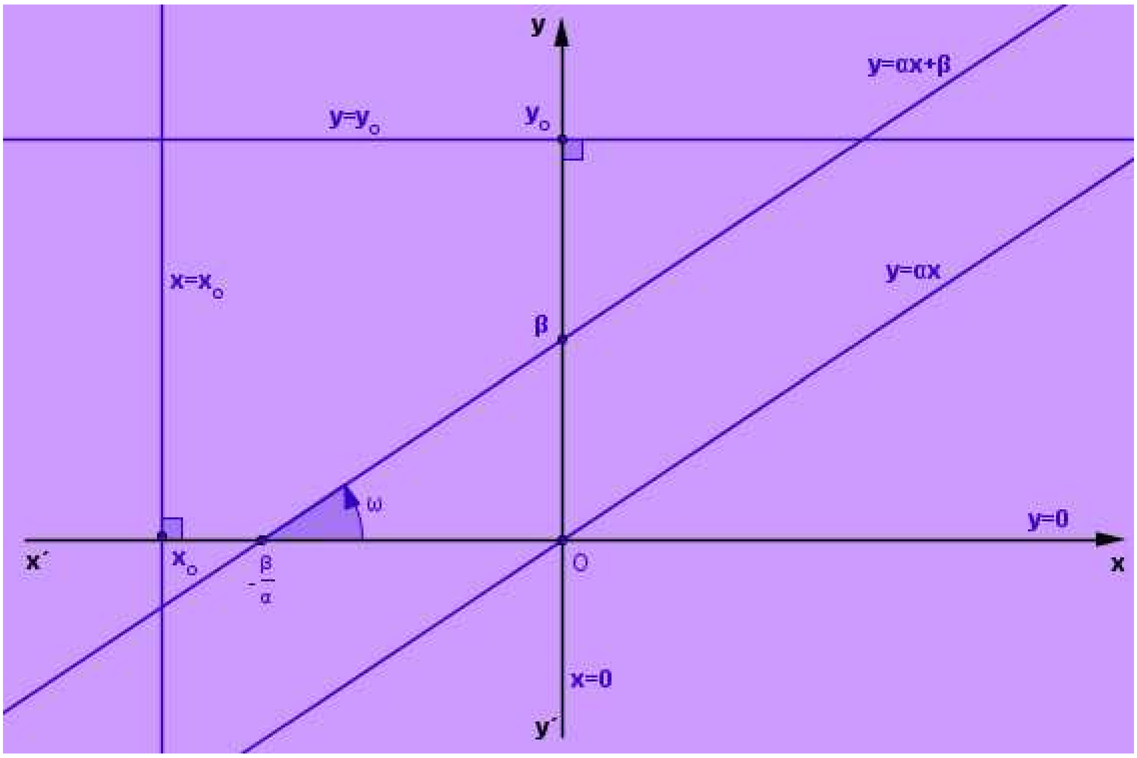
- $y=\alpha x+\beta$ ο α καθορίζει τη διεύθυνση της ευθείας ε
  και ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** της ε
  αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ε με τον x΄x τότε είναι: **$\alpha=$εφω**
  ο β καθορίζει το σημείο τομής της ε με τον y΄y
- $y=\alpha x$ διέρχεται από το O(0, 0)
- $y=y_0$ παράλληλη στον x΄x, τέμνει τον y΄y στο $(0, y_0)$
- $x=x_0$ παράλληλη στον y΄y, τέμνει τον x΄x στο $(x_0, 0)$

✍ η εξίσωση **κάθε** ευθείας έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή: **$y=\alpha x+\beta$**
και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$
εκτός από την **$x=x_0$** η οποία δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης
ούτε μπορεί να πάρει τη μορφή $y=\alpha x+\beta$ αφού **δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης**

✍ για να σχεδιάσουμε την $y=\alpha x+\beta$ χρειαζόμαστε 2 σημεία της συνήθως τα $A(-\beta/\alpha, 0)$ & $B(0, \beta)$

✍ αν (ε_1): $y=\alpha_1x+\beta_1$ και (ε_2): $y=\alpha_2x+\beta_2$ είναι δύο ευθείες, τότε:

- αν **$\alpha_1\neq\alpha_2$** οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ **τέμνονται**
- αν **$\alpha_1=\alpha_2$** και **$\beta_1\neq\beta_2$** οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι **παράλληλες**
- αν **$\alpha_1=\alpha_2$** και **$\beta_1=\beta_2$** οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ **ταυτίζονται**



γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

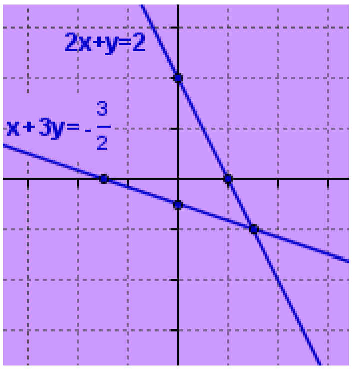
το **σύστημα** (Σ) : $\begin{cases} \alpha_1x+\beta_1y=\gamma_1 & (\varepsilon_1) \\ \alpha_2x+\alpha_2y=\gamma_2 & (\varepsilon_2) \end{cases}$

οι **εξισώσεις** (ε_1) και (ε_2) του (Σ) είναι
οι εξισώσεις δύο **ευθειών** ε_1 και ε_2 του επιπέδου

λύση του (Σ) είναι κάθε **ζευγάρι** αριθμών **(x,y)** που **επαληθεύει** τις (ε_1) **και** (ε_2)
δηλαδή κάθε **σημείο** του επιπέδου που **ανήκει και στις δύο** ευθείες

- ►αν οι ε_1 και ε_2 **τέμνονται** στο (x_o,y_o) το (Σ) έχει **μοναδική λύση**, τη λύση: $(x,y)=(x_o,y_o)$
- ►αν οι ε_1 και ε_2 **ταυτίζονται** το (Σ) έχει **άπειρες λύσεις (αόριστο)**, τα κοινά σημεία των ε_1 και ε_2
- ►αν οι ε_1 και ε_2 είναι **παράλληλες** το (Σ) **δεν έχει λύση (αδύνατο)**, αφού οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ δεν έχουν κοινά σημεία

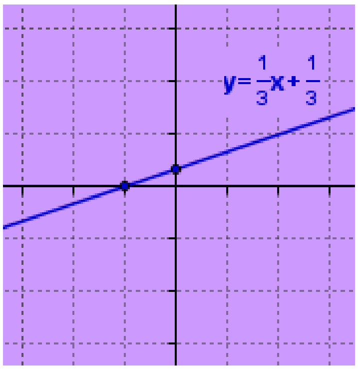
παραδείγματα...



►το (Σ) : $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+3y=-\frac{3}{2} \end{cases}$, γράφεται: $\begin{cases} y=-2x+2 & (\varepsilon_1) \\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2} & (\varepsilon_2) \end{cases}$

και έχει **μοναδική λύση**: $(x,y)=(\frac{3}{2},-1)$

(το **σημείο τομής** των ε_1 και ε_2)

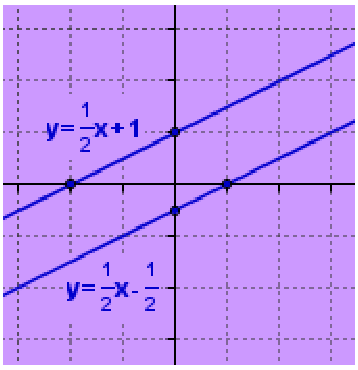


►το (Σ) : $\begin{cases} x-3y=-1 \\ -2x+6y=2 \end{cases}$, γράφεται: $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} & (\varepsilon_1) \\ y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} & (\varepsilon_2) \end{cases}$

και έχει **άπειρες λύσεις**: $(x,y)=(x, \frac{1}{3}x+\frac{1}{3})$

όπου x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

(τα **άπειρα σημεία της ευθείας** $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$)



►το (Σ) : $\begin{cases} 2x-4y=2 \\ x-2y=-2 \end{cases}$, γράφεται: $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & (\varepsilon_1) \\ y=\frac{1}{2}x+1 & (\varepsilon_2) \end{cases}$

και δεν έχει **καμία λύση**

(αφού $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$)

αλγεβρική επίλυση γραμμικών συστημάτων 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

η μέθοδος της αντικατάστασης με παραδείγματα…

▶ (Σ_1): $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+3y=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2 \\ x+3(-2x+2)=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2 \\ -5x=-\frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$

το (Σ_1) έχει **μοναδική λύση:** $(x, y)=(\frac{3}{2}, -1)$

▶ (Σ_2): $\begin{cases} x-3y=-1 \\ -2x+6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-1 \\ -2(3y-1)+6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-1 \\ 0y=0 \end{cases}$

το (Σ_2) **(αόριστο)** έχει **άπειρες λύσεις**: $(x, y)=(3y-1, y)$

όπου y είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

ή αλλιώς: $(x, y)=(x, 1/3x+1/3)$

όπου x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

(λύσεις που είναι οι προηγούμενες σε άλλη μορφή)

▶ (Σ_3): $\begin{cases} 2x-4y=2 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y-2)-4y=2 \\ x=2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0y=6 \\ x=2y-2 \end{cases}$

το (Σ_3) **(αδύνατο) δεν έχει** καμία **λύση**

η μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών με παραδείγματα…

▶ $(\Sigma\ )$: $\begin{cases} 3x-2y=1 & \cdot(2) \\ -2x+5y=3 & \cdot(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4y=2 & (\varepsilon_1) \\ -6x+15y=9 & (\varepsilon_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4y=2 \\ (\varepsilon_1)+(\varepsilon_2) \rightarrow 11y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

▶ (Σ_1): $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+3y=-3/2 & \cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2 & (\varepsilon_1) \\ -2x-6y=3 & (\varepsilon_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2 \\ (\varepsilon_1)+(\varepsilon_2) \rightarrow -5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3/2 \\ y=-1 \end{cases}$

▶ (Σ_2): $\begin{cases} x-3y=-1 & \cdot(2) \\ -2x+6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6y=-2 & (\varepsilon_1) \\ -2x+6y=2 & (\varepsilon_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6y=-2 \\ (\varepsilon_1)+(\varepsilon_2) \rightarrow 0x+0y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-1 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$ αόριστο κ.λ.π.

▶ (Σ_3): $\begin{cases} 2x-4y=2 \\ x-2y=-2 & \cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=2 & (\varepsilon_1) \\ -2x+4y=4 & (\varepsilon_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=2 \\ (\varepsilon_1)+(\varepsilon_2) \rightarrow 0x+0y=6 \end{cases}$ αδύνατο

το πρόβλημα των πεζών

Δύο πόλεις Α και Β απέχουν 40Km. Δύο πεζοί ξεκινούν ταυτόχρονα ο $1^{ος}$ από την Β προς την Α με 4.5Km/h και ο $2^{ος}$ από την Α προς τη Β με 3.5Km/h.

i. να εκφράσεις τις αποστάσεις s των πεζών από την πόλη Α ως συνάρτηση του χρόνου t και να κάνεις τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών

ii. που και πότε θα συναντηθούν οι δύο πεζοί;

και κάποιες λύσεις του…

i. ο $1^{ος}$ πεζός σε t h διανύει απόσταση 4.5t Km και η κίνησή του διαρκεί $\frac{40}{4.5} \sim 8.9\,h$

συνεπώς απέχει από την πόλη Α απόσταση $s = 40 - 4.5t$ Km όπου $0 \le t \le 8.9$

η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ

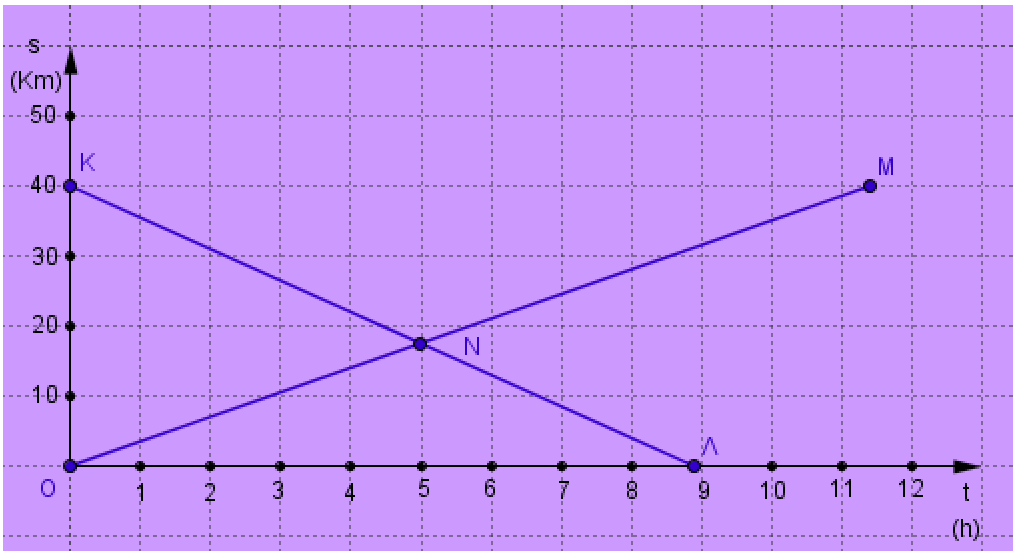
ο $2^{ος}$ πεζός σε t h διανύει απόσταση 3.5t Km και η κίνησή του διαρκεί $\frac{40}{3.5} \sim 11.4\,h$

συνεπώς απέχει από την πόλη Α απόσταση $s = 3.5t$ Km όπου $0 \le t \le 11.4$

η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ

t	0	8.9
s=40-4.5t	40	0

t	0	11.4
s=3.5t	0	40



ii. **γραφική λύση**

αφού οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο Ν(5, 17.5)

οι πεζοί θα συναντηθούν μετά 5h σε απόσταση 17.5Km από την πόλη Α

αλγεβρική λύση

με σύστημα:

$$\begin{cases} s = 40 - 4.5t \\ s = 3.5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 - 4.5t = 3.5t \\ s = 3.5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 = 8t \\ s = 3.5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5h \\ s = 17.5Km \end{cases}$$

με απλή εξίσωση:

έστω ότι θα συναντηθούν μετά t h , τότε: ο $1^{ος}$ θα έχει διανύσει 4.5t Km , ο $2^{ος}$ 3.5t Km

και θα είναι: $4.5t + 3.5t = 40 \Leftrightarrow 8t = 40 \Leftrightarrow t = 5$

άρα θα συναντηθούν μετά 5h σε απόσταση $5 \cdot 3.5 = 17.5$Km από την πόλη Α.

σειρά σου τώρα...

1. Βρες την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(2, 3) και

- **i.** σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^{o}
- **ii.** διέρχεται και από το σημείο Β(3, 2)
- **iii.** είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x-1$
- **iv.** είναι κάθετη στην ευθεία $x=5$.

2. Να χαράξεις σε ένα σύστημα συντεταγμένων την ευθεία (ε): $y=3x-2$ και να βρεις το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία αυτή

- **i.** με τους άξονες συντεταγμένων
- **ii.** με τις ευθείες: $x=3$ και $y=1$.

3. **i.** για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, είναι παράλληλες οι ευθείες (ε_1): $y=\lambda^2 x+2-\lambda$ και (ε_2): $4\lambda x-2y+3=0$;

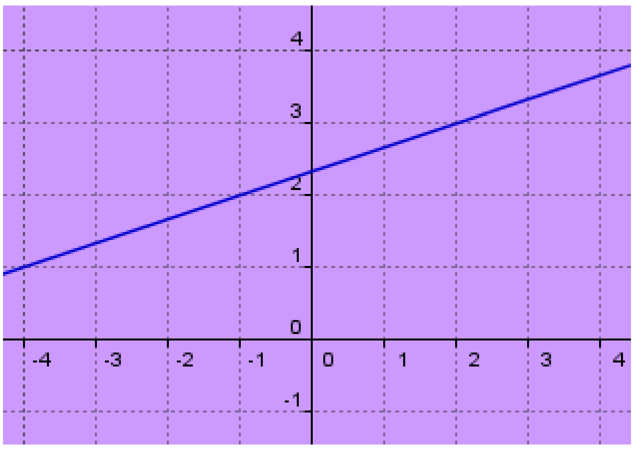
ii. για τις τιμές αυτές του λ, χάραξε τις ευθείες στο καρτεσιανό επίπεδο.

4. Λύσε τα ακόλουθα συστήματα:

i. $\begin{cases} 2\alpha-\beta=1 \\ 4\alpha-2\beta=2 \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} x\sqrt{2}-y=1 \\ 2x-y\sqrt{2}=2 \end{cases}$ **iii.** $\begin{cases} 9\varphi-\omega=3 \\ 5\varphi+7\omega=11 \end{cases}$ **iv.** $\begin{cases} 7x-12y=0 \\ 3x+11y=0 \end{cases}$

v. $\begin{cases} x-3y=5 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ **vi.** $\begin{cases} x-2y=0 \\ 4x-8y=0 \end{cases}$ **vii.** $\begin{cases} \kappa-2=\lambda+5 \\ 2\kappa-\lambda=2 \end{cases}$ **viii.** $\begin{cases} y=3x \\ x+2y-3=0 \end{cases}$

5. Βρες τη συνάρτηση της οποίας τη γραφική της οποίας τη γραφική παράσταση βλέπεις στο διπλανό σχήμα



6. Χωρίς να λύσεις τα συστήματα

$(\Sigma_1): \begin{cases} 4x - y = 16 \\ 2x - \frac{1}{2}y = 8 \end{cases}$ $(\Sigma_2): \begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = x + 4 \end{cases}$ $(\Sigma_3): \begin{cases} y = \sqrt{5} - 2x \\ y = 2 - 2x \end{cases}$ πες το!

i. μοναδική λύση έχει το ..... ii. άπειρες λύσεις έχει το ..... iii. αδύνατο είναι το .....

7. Βρες τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ ώστε η εξίσωση x^2-κx+λ=0 να έχει ρίζες τους αριθμούς - 1 και 3.

8. Αν στο $Γ_3$ έρθουν 4 ακόμη αγόρια τότε τα αγόρια θα είναι το 75% του τμήματος, αν όμως φύγουν 2 αγόρια τότε τα αγόρια θα είναι το 50% του τμήματος. Μπορείς να βρεις πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει το $Γ_3$;

9. Ένα ξενοδοχείο έχει συνολικά 50 μονόκλινα και δίκλινα δωμάτια με 92 συνολικά κρεβάτια. Πόσα μονόκλινα και πόσα δίκλινα δωμάτια έχει το ξενοδοχείο;

10. Βρες τους ακεραίους αριθμούς των οποίων η διαφορά των τετραγώνων ισούται με 19.

Wassily Kandinsky (1866-1944) on white II (1923)