η συνάρτηση $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$ …

$A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. η f είναι συνεχής (ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων)

$$\lim_{x\to0^-} xe^{-\frac{1}{x}} \overset{0(+\infty)}{=} \lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x\to0^-}\frac{\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}} \overset{u=-\frac{1}{x}\quad x\to0^-\ \to+\infty}{=} -\lim_{u\to+\infty}e^{u}=-\infty$$

άρα η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της c_f (αριστερά του 0 και προς τα κάτω)

$$\lim_{x\to0^+} xe^{-\frac{1}{x}} \overset{u=-\frac{1}{x}\quad x\to0^+\ \to-\infty}{=} \lim_{x\to0^+}x\lim_{u\to-\infty}e^{u}=0\cdot0=0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} xe^{-\frac{1}{x}} \overset{u=-\frac{1}{x}\quad x\to\pm\infty\ \to0}{=} \lim_{x\to\pm\infty}x\lim_{u\to0}e^{u}=(\pm\infty)\cdot1=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to\pm\infty}x\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)\overset{\infty\cdot0}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\ldots=-1$$

άρα η ευθεία y=x-1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της c_f στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$:

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}+x\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}.$$

$$f''(x)=\frac{x-(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{x+1}{x}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}.$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		+	0	−	‖	+	
f''			−		‖	+	
f	$-\infty$	↗	τ.μ. $-e$	↘	$-\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$

$f(A_f)=(-\infty,-e]\cup(-\infty,-e]\cup(0,+\infty)$

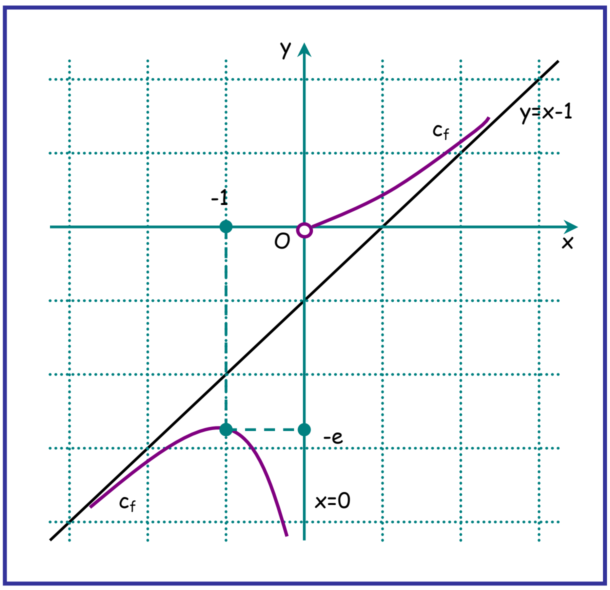
$=(-\infty,-e]\cup(0,+\infty)$

$$y=xe^{-\frac{1}{x}}\xrightarrow{\text{για } y=0}xe^{-\frac{1}{x}}=0,\ \text{αδύνατη}$$

συνεπώς η c_f δεν τέμνει τον x΄x

ούτε βέβαια τον y΄y

(αφού το 0 δεν ανήκει στο A_f)



η συνάρτηση $f(x)=x\sqrt{e^{2-x^2}}$ ...

$A_f=R$. η f είναι συνεχής (ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων).

$\forall x\in R:\ -x\in R$ και $f(-x)=-f(x)$ άρα η f είναι περιττή (η c_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$).

$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{2-x^2}{2}} \underbrace{=}_{(\pm\infty)0} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2-2}{2}}} \underbrace{=}_{\frac{\pm\infty}{+\infty}} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{\frac{x^2-2}{2}}\right)'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{xe^{\frac{x^2-2}{2}}} = \ldots = 0.$$

άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της c_f στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

$$\forall x\in R:\ f'(x)=e^{\frac{2-x^2}{2}}+x(-x)e^{\frac{2-x^2}{2}}=(1-x^2)e^{\frac{2-x^2}{2}}.$$

$$f''(x)=-2xe^{\frac{2-x^2}{2}}+(1-x^2)(-x)e^{\frac{2-x^2}{2}}=x(x^2-3)e^{\frac{2-x^2}{2}}.$$

$y=xe^{\frac{2-x^2}{2}} \xrightarrow{\text{για } x=0} xe^{\frac{2-x^2}{2}}=0 \Leftrightarrow x=0$ συνεπώς η c_f έχει κοινό σημείο με τους άξονες το $O(0,0)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f΄		-		-	0	+		+	0	-		-	
f΄΄		-	0	+		+	0	-		-	0	+	
f	0	↘ σ.κ.	$(-\sqrt{3},-\sqrt{\frac{3}{e}})$	↘	τ.ε. $-\sqrt{e}$	↗ σ.κ.	$(0,0)$	↗	τ.μ. $\sqrt{e}$	↘ σ.κ.	$(\sqrt{3},\sqrt{\frac{3}{e}})$	↘	0

$f(A_f)=\ [-\sqrt{e},0)\ \cup\ [-\sqrt{e},\sqrt{e}\,]\ \cup\ (0,\sqrt{e}\,]\ =\ [-\sqrt{e},\sqrt{e}\,]$