Ονοματεπώνυμο: Τμήμα:

Ημερομηνία: Ομάδα: **A**

Εισηγητής: Βαθμός:

διαγώνισμα α΄τετραμήνου στα μαθηματικά κατεύθυνσης γ΄λυκείου

Θέμα 1^o

(12μ.) **Α.** αν $z_1, z_2 \in C$, να αποδείξεις ότι: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

απόδειξη

(13μ.) **Β.** τι εκφράζει γεωμετρικά το $|z_1 - z_2|$;

απάντηση

Θέμα 2^o

(10μ.) **Α.** αν $z \in C$, οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των z , $-\bar{z}$ είναι συμμετρικές ως προς ....

(10μ.) **Β.** οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών $5 + 3i$ και $3 + 5i$ είναι συμμετρικές ως προς ....

(5μ.) **Γ.** αν η εξίσωση $z^2 + \beta z + \gamma = 0$ $(\beta, \gamma \in R)$ έχει ρίζα τον αριθμό $2 + i$ τότε έχει ρίζα και τον αριθμό $\frac{5}{2+i}$ σωστό ή λάθος;

Θέμα 3^o

(6μ.) **Α.** αν ο μιγαδικός z επαληθεύει μία σχέση της στήλης Β
τότε η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται σε μία γραμμή της στήλης Α
αντιστοίχισε τα στοιχεία της στήλης Α σε στοιχεία της στήλης Β

στήλη Α	στήλη Β
	1. $\lvert z+2+i\rvert=3$
α. κύκλος κέντρου Κ(2,1) και ακτίνας 3	2. $\lvert z\rvert=3$
β. μεσοκάθετος τμήματος με άκρα (2,0) και (0,-1)	3. $\lvert z-2-i\rvert=3$
γ. κύκλος κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας 3	4. $\lvert z+2\rvert=\lvert z-i\rvert$
	5. $\lvert z-2\rvert=\lvert z+i\rvert$

__απάντηση:__ α → … β → … γ → …

(19μ.) **Β.** να βρεις στο μιγαδικό επίπεδο τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει : $\lvert z+3\rvert=2\lvert z-3\rvert$

__λύση__

Θέμα 4^o

(5μ.) **Α.** να αποδείξεις ότι ο αριθμός u είναι φανταστικός αν και μόνο αν $u=-\bar{u}$

__απόδειξη__

(20μ.) **Β.** αν $z\in C$, με $z\neq ai$ όπου $a\in R^*$, να αποδείξεις ότι

ο $w=\dfrac{z+ai}{iz+a}$ είναι φανταστικός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός

__απόδειξη__

καλή επιτυχία !

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα:

Ημερομηνία: Ομάδα: **Β**

Εισηγητής: Βαθμός:

διαγώνισμα α΄τετραμήνου στα μαθηματικά κατεύθυνσης γ΄λυκείου

Θέμα 1ο

(12μ.) **Α.** αν $z_1 , z_2 \in C$, να αποδείξεις ότι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

απόδειξη

(13μ.) **Β.** να γράψεις την τριγωνική ανισότητα για τους $z_1 , z_2 \in C$

απάντηση

Θέμα 2ο

(10μ.) **Α.** αν $z \in C$, οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των $-z$, $\overline{z}$ είναι συμμετρικές ως προς ....

(10μ.) **Β.** οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών $1 + 3i$ και $3 + i$ είναι συμμετρικές ως προς ....

(5μ.) **Γ.** αν η εξίσωση $z^2 + \beta z + \gamma = 0$ ($\beta, \gamma \in R$) έχει ρίζα τον αριθμό $1 + i$ τότε έχει ρίζα και τον αριθμό $\dfrac{2}{1 - i}$ σωστό ή λάθος;

Θέμα 3^o

(6μ.) **Α.** αν ο μιγαδικός z επαληθεύει μία σχέση της στήλης Β
τότε η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται σε μία γραμμή της στήλης Α
αντιστοίχισε τα στοιχεία της στήλης Α σε στοιχεία της στήλης Β

στήλη Α	στήλη Β
	1. $\|z+2-i\|=2$
α. κύκλος κέντρου Κ(-2,1) και ακτίνας 2	2. $\|z\|=2$
β. μεσοκάθετος τμήματος με άκρα (-2,0) και (0,1)	3. $\|z-2-i\|=3$
γ. κύκλος κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας 2	4. $\|z+2\|=\|z-i\|$
	5. $\|z-2\|=\|z+i\|$

απάντηση: α → … β → … γ → …

(19μ.) **Β.** αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον κύκλο
κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας 2 , να βρεις τη γραμμή στην οποία ανήκει
η εικόνα του μιγαδικού $u = (-\sqrt{3} + i)z$

λύση

Θέμα 4^o

(5μ.) **Α.** να αποδείξεις ότι ο αριθμός u είναι πραγματικός αν και μόνο αν $u = \bar{u}$

απόδειξη

(20μ.) **Β.** αν $z \in C$, με $z \neq 0$, να αποδείξεις ότι
ο $w = z + \frac{1}{z}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$

απόδειξη

καλή επιτυχία !

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα:

Ημερομηνία: Ομάδα: **Α**

Εισηγητής: Βαθμός:

διαγώνισμα α΄τετραμήνου στα μαθηματικά κατεύθυνσης γ΄λυκείου

Θέμα 1^{o} να διατυπώσεις και να αποδείξεις το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

απάντηση

Θέμα 2^{o} να αποδείξεις ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln x-1$, $x\in[1, e]$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσεις την αντίστροφή της

απόδειξη

Θέμα 3ο αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο 1 και $\forall x,y \in R^*$: $f(xy)=f(x)+f(y)$
να αποδείξεις ότι η f είναι συνεχής στο R^*

απόδειξη

Θέμα 4ο αν μία συνάρτηση f: $[0, 1] \to [0, 1]$ είναι συνεχής,
να αποδείξεις ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιος ώστε: $f(\xi)=\xi^{\nu}$ $(\nu \in N^*)$

απόδειξη

καλή επιτυχία !

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα:

Ημερομηνία: Ομάδα: **Β**

Εισηγητής: Βαθμός:

διαγώνισμα α΄τετραμήνου στα μαθηματικά κατεύθυνσης γ΄λυκείου

Θέμα 1^{ο} να αποδείξεις ότι $\lim\limits_{x\to 0} ημx = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} συνx = 1$ και ότι η συνάρτηση ημx είναι συνεχής

απόδειξη

Θέμα 2^{ο} να αποδείξεις ότι η συνάρτηση $f(x)=e^{1+x}$, $x\in[-1, 0]$ είναι αντιστρέψιμη
και να ορίσεις την αντίστροφή της

απόδειξη

Θέμα 3ο αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο 0 με $f(0)\neq 0$ και $\forall x,y\in R$: $f(x+y)=f(x)f(y)$
να αποδείξεις ότι η f είναι συνεχής στο R

απόδειξη

Θέμα 4ο αν μία συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$, όπου $\alpha>0$, είναι συνεχής
να αποδείξεις ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha, \beta]$ τέτοιος ώστε: $\dfrac{f(\xi)}{\alpha} = \dfrac{\beta}{\xi}$

απόδειξη

καλή επιτυχία !