

Οι αριθμοί Fibonacci

Εισαγωγή

Η ακολουθία αριθμών στην οποία ο κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων είναι γνωστή ως **ακολουθία Fibonacci**: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Επιπλέον, ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας τείνει προς την αποκαλούμενη **Χρυσή Τομή**, ή **Χρυσή αναλογία**, ή **Αριθμό φ** = 1.618033989.

Δες ότι: $1/\varphi = 0.618033989$, με αποτέλεσμα να ισχύει: $1/\varphi = \varphi - 1$ (δηλ. $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$)

Ένα ορθογώνιο του οποίου ο λόγος των πλευρών είναι ίσος με $1/\varphi$ ονομάζεται **Χρυσό Ορθογώνιο**.

Η ακολουθία Fibonacci παράγεται από τη σχέση: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$,

και απαντάται συχνά σε πολλούς τομείς των μαθηματικών και των άλλων επιστημών.

Είναι όμως σημαντικό και το πόσο συχνά συναντάται στη φύση, σε μοτίβα όπως τα λουλούδια ή τα φύλλα των φυτών.

Ιστορία

Ο Fibonacci ήταν πολύ γνωστός στην εποχή του και αναγνωρίζεται σήμερα ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός του Μεσαίωνα. Γεννήθηκε στη δεκαετία του 1170 και πέθανε αυτή του 1240. Άγαλμά του υπάρχει στο νεκροταφείο, δίπλα στον Καθεδρικό Ναό της Pisa, κοντά στον περίφημο πύργο. Το όνομά του έχει δοθεί σε δύο δρόμους, στην Pisa και τη Φλωρεντία. Το πραγματικό του όνομα ήταν Leonardo Pisano, όμως ο ίδιος αποκαλούσε τον εαυτό του Fibonacci, σύντμηση του Filius Bonacci (γιός του Bonacci), από το όνομα του πατέρα του. Ο πατέρας του Leonardo, Guglielmo Bonacci, ήταν τελωνειακός υπάλληλος στη Βορειοαφρικανική πόλη Bugia. Ο Fibonacci μεγάλωσε εκεί και η εκπαίδευσή του επηρεάστηκε σημαντικά από τους Μαυριτανούς αλλά και από τα ταξίδια που έκανε αργότερα σε όλο το μήκος της Μεσογειακής ακτής. Έτσι γνώρισε πολλούς εμπόρους και έμαθε τα αριθμητικά συστήματα που αυτοί χρησιμοποιούσαν για τις συναλλαγές και τους λογαριασμούς τους. Σύντομα διαπίστωσε τα πλεονεκτήματα του «Ινδοαραβικού» αριθμητικού συστήματος και έγινε από τους πρώτους που το εισήγαγαν στην Ευρώπη. Πρόκειται για το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιείται και σήμερα, με δέκα ψηφία, ένα εκ των οποίων το μηδέν, και την υποδιαστολή.

Το βιβλίο του Liber abaci (βιβλίο των υπολογισμών) το οποίο ολοκληρώθηκε το 1202 έπεισε αρκετούς Ευρωπαίους μαθηματικούς να χρησιμοποιήσουν το «νέο» σύστημα. Το βιβλίο, γραμμένο στα λατινικά, περιγράφει με λεπτομέρεια τους μαθηματικούς κανόνες που σήμερα διδάσκονται στο δημοτικό για την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση και περιέχει πολλές ασκήσεις-παραδείγματα με λεπτομέρειες για την εφαρμογή αυτών των κανόνων.

Η ακολουθία Fibonacci και η φύση

Τα φυτά δε γνωρίζουν για την ακολουθία Fibonacci, απλά μεγαλώνουν με τον πιο πρόσφορο και αποδοτικό τόπο. Όμως η ακολουθία κάνει την εμφάνισή της στη διάταξη των φύλων γύρω από το μίσχο. Εμφανίζεται επίσης στην ανάπτυξη των βελόνων αρκετών ειδών ελάτου, καθώς επίσης και στη διάταξη των πετάλων στις μαργαρίτες και τα ηλιοτρόπια. Μερικά κωνοφόρα δένδρα παρουσιάζουν τη σειρά αριθμών στη δομή της επιφάνειας των κορμών τους, ενώ τα φοινικόδενδρα στους δακτυλίους των κορμών τους.

Όμως πώς προκύπτει αυτή η διάταξη, αυτή η συμμετρία σε σχέση με την ακολουθία;

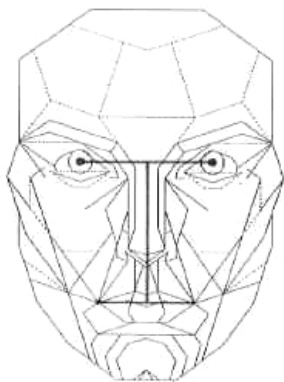
Στην περίπτωση του φυλλώματος μπορεί να σχετίζεται με τη μεγιστοποίηση του χώρου που είναι διαθέσιμος για την ανάπτυξη κάθε φύλλου ή το φώς πρέπει να πέφτει πάνω στο κάθε φύλλο.

Η φύση προφανώς δεν προσπαθεί να χρησιμοποιήσει την ακολουθία Fibonacci

αλλά αυτή εμφανίζεται ως το δευτερεύον αποτέλεσμα μιας πολύ βαθύτερης φυσικής διαδικασίας. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το ίδιο το ανθρώπινο χέρι: κάθε άνθρωπος έχει 2 χέρια, κάθε ένα από τα οποία έχει 5 δάκτυλα, κάθε δάκτυλο αποτελείται από 3 τμήματα που χωρίζονται από 2 αρθρώσεις. Όλοι αυτοί οι αριθμοί ανήκουν στην ακολουθία Fibonacci.



Η γνώση του αριθμού ϕ και του χρυσού ορθογώνιου ανάγεται στους αρχαίους Έλληνες οι οποίοι βάσισαν πάνω τους το πιο γνωστό έργο τέχνης: ο Παρθενώνας είναι γεμάτος από χρυσά ορθογώνια. Οι μαθητές του μαθηματικού και φιλοσόφου Πυθαγόρα έφταναν στο σημείο να θεωρούν τη χρυσή αναλογία, Θεόπνευστη.



Αργότερα ο Leonardo Da Vinci ζωγράφησε το πρόσωπο της Mona Lisa ώστε αυτό να χωράει τέλεια σε ένα χρυσό ορθογώνιο και δόμησε τον υπόλοιπο πίνακα γύρω από το πρόσωπο χωρίζοντάς τον επίσης σε χρυσά ορθογώνια.

Ο Mozart διαίρεσε μεγάλο αριθμό από τις σονάτες του σε δύο μέρη, η χρονική αναλογία των οποίων αντιστοιχεί στη χρυσή τομή, τον αριθμό ϕ , αν και υπάρχει σημαντική διχογνωμία για το κατά πόσο αυτό έγινε σκόπιμα.

Πιο πρόσφατα ο Ούγγρος συνθέτης Mela Bartok και ο Γάλλος αρχιτέκτονας Le Corbusier χρησιμοποίησαν σκόπιμα τη χρυσή αναλογία στα έργα τους.

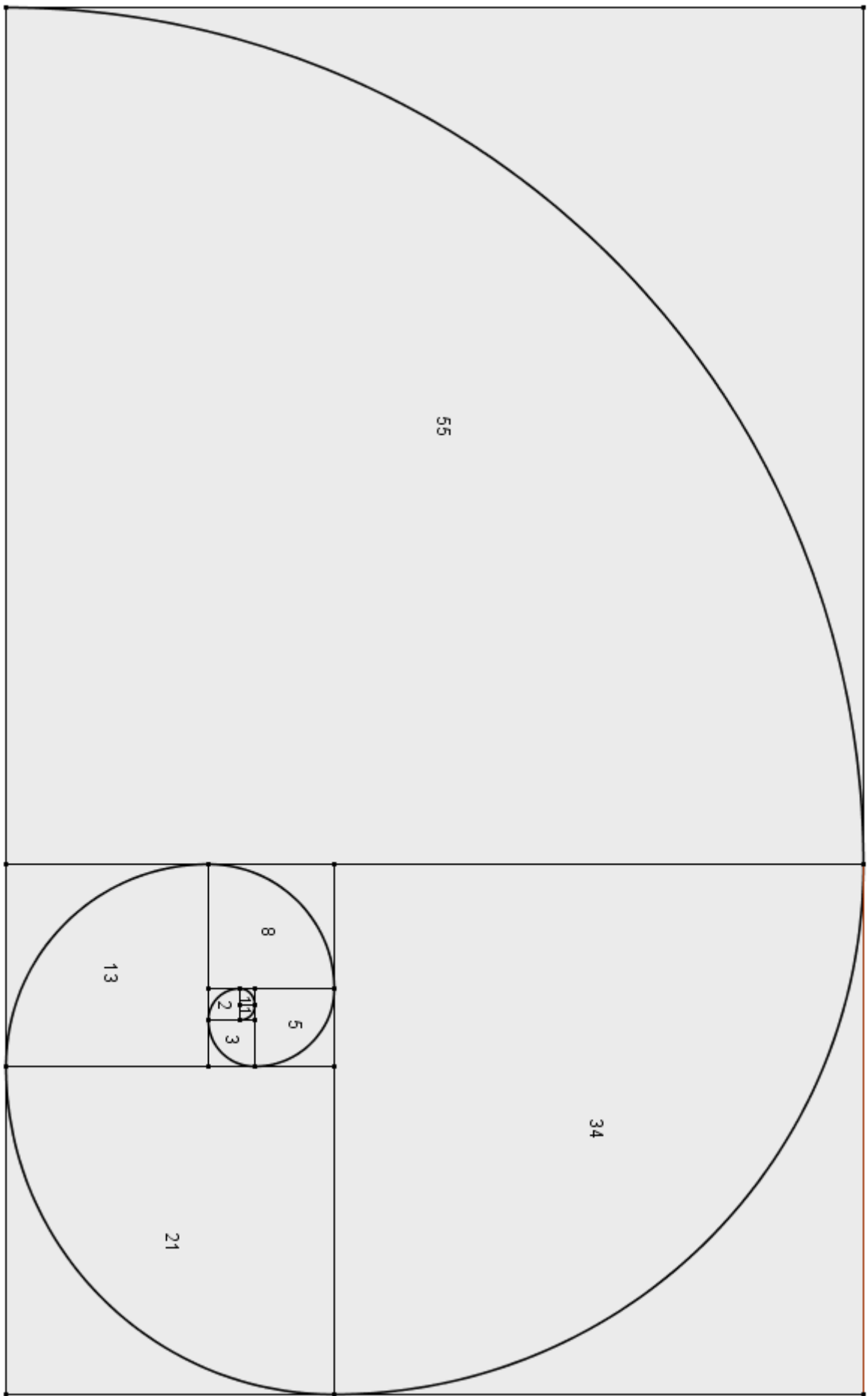
Όμως ακόμα και ο χριστιανικός σταυρός αποτελείται από δύο κάθετες μεταξύ τους γραμμές με την αναλογία ανάμεσα στην κατακόρυφη και την οριζόντια να μην είναι άλλη από τον αριθμό ϕ .

Ακόμη και σήμερα η χρυσή αναλογία απαντάται σε πλήθος ανθρωπίνων κατασκευών.

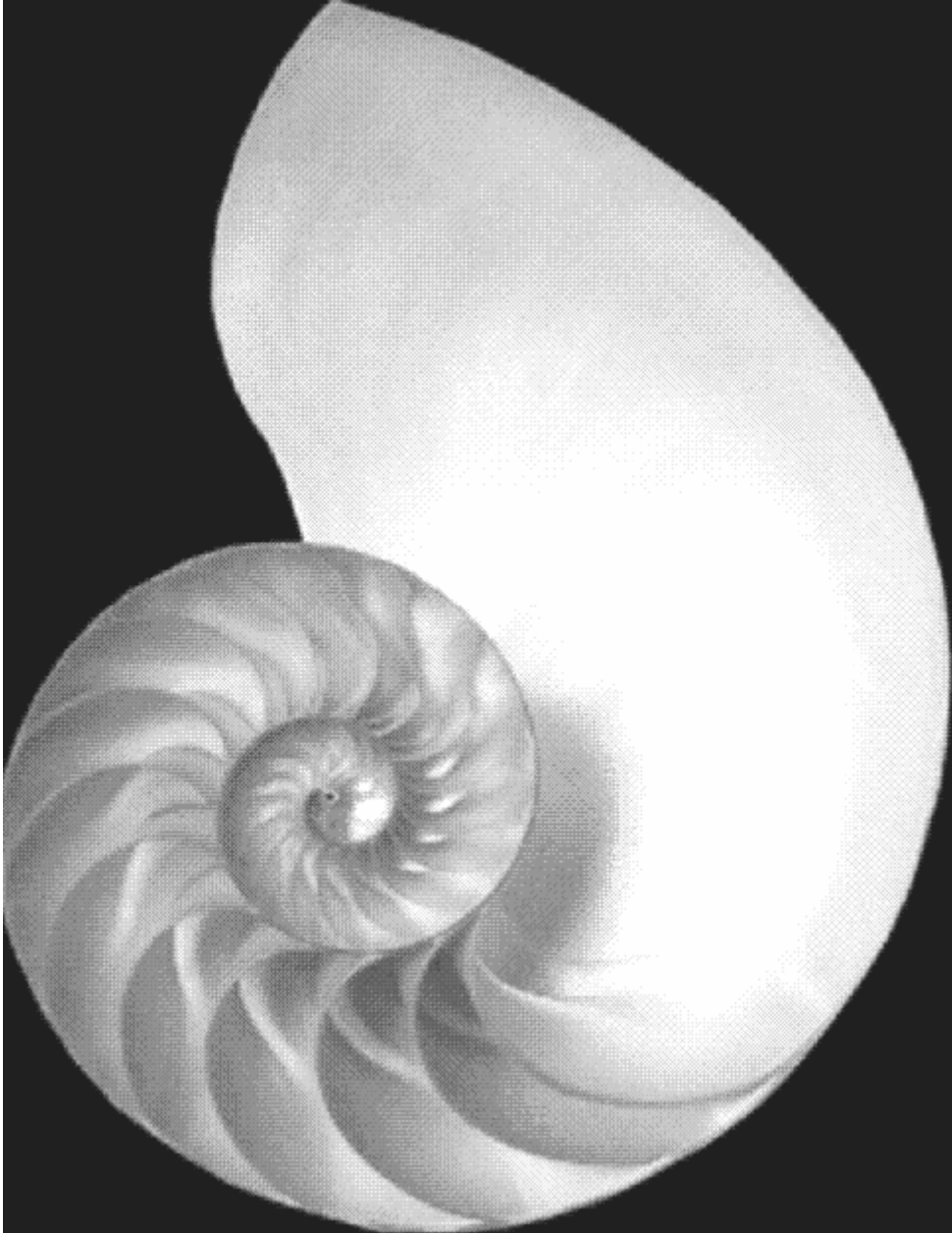
Αν θέλει κανείς να δει ένα χρυσό ορθογώνιο αρκεί να κοιτάξει μια πιστωτική κάρτα το σχήμα της οποίας είναι ακριβώς αυτό.

Οι πολυάριθμες εμφανίσεις της χρυσής αναλογίας, και των χρυσών ορθογώνιων στην τέχνη, είναι αντικείμενο συζητήσεων και ερευνών μεταξύ των ψυχολόγων για το κατά πόσο οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται το χρυσό ορθογώνιο για παράδειγμα, ως πιο όμορφο και αρμονικό σχήμα από οποιοδήποτε άλλο ορθογώνιο.

Πέρα όμως από τα επιστημονικά δεδομένα η χρυσή αναλογία, ο αριθμός ϕ , περιβάλλεται από ένα πέπλο μυστηρίου, κυρίως γιατί εντυπωσιακές προσεγγίσεις του απαντώνται, εντελώς απρόσμενα σε ένα σωρό μέρη στη φύση. Ακόμα και μια τομή του ανθρώπινου DNA φαίνεται να ενσωματώνεται άψογα σε ένα χρυσό δεκάγωνο. Η χρυσή αναλογία και τα σχήματα που σχετίζονται με αυτή συνεχίζουν να κινούν το ενδιαφέρον των μαθηματικών, αλλά και των απλών ανθρώπων.



και συνεχίζεται...



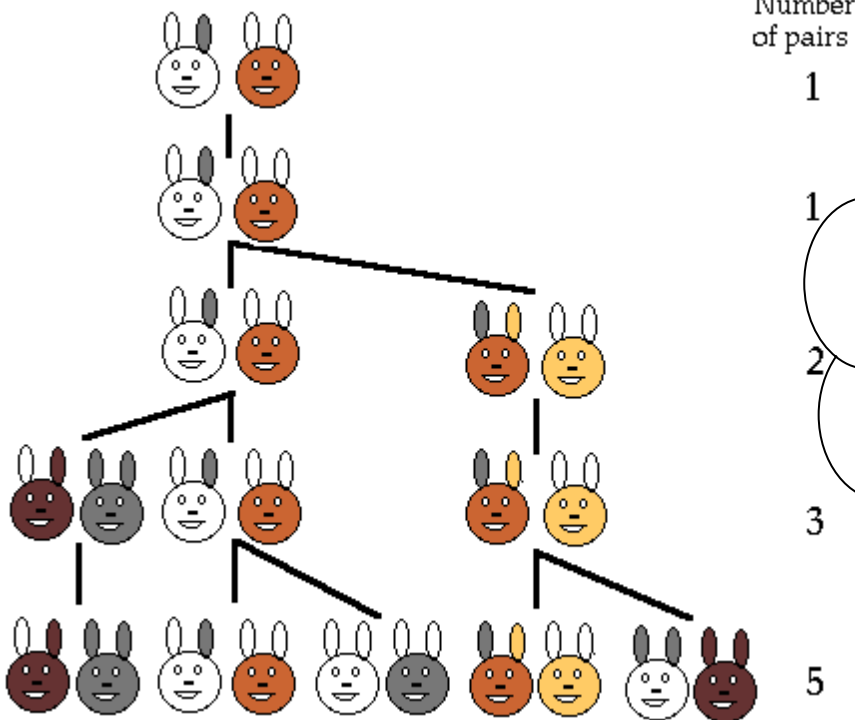
Fibonacci's Rabbits

The original problem that Fibonacci investigated (in the year 1202) was about how fast rabbits could breed in ideal circumstances.

Suppose a newly-born pair of rabbits, one male, one female, are put in a field. Rabbits are able to mate at the age of one month so that at the end of its second month a female can produce another pair of rabbits. Suppose that our rabbits **never die** and that the female **always** produces one new pair (one male, one female) **every month** from the second month on. The puzzle that Fibonacci posed was...

How many pairs will there be in one year?

1. At the end of the first month, they mate, but there is still only 1 pair.
2. At the end of the second month the female produces a new pair, so now there are 2 pairs of rabbits in the field.
3. At the end of the third month, the original female produces a second pair, making 3 pairs in all in the field.
4. At the end of the fourth month, the original female has produced yet another new pair, the female born two months ago produces her first pair also, making 5 pairs.



Number
of pairs

1

1

2

3

5

στην αρχή κάθε μήνα (v)
μετά τον δεύτερο ($v > 2$)
υπάρχουν τα ζευγάρια
του προηγούμενου μήνα (a_{v-1})
και τα νεογέννητα ζευγάρια
που είναι τόσα όσα τα ζευγάρια
του προ-προηγούμενου μήνα (a_{v-2})
που μπορούν πια να γεννοβολήσουν!
Δηλ. $a_1=1$
 $a_2=1$
 $a_v=a_{v-1}+a_{v-2}$ ($v > 2$)

The number of pairs of rabbits in the field at the start of each month is:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Now can you see **why** this is the answer to our Rabbits problem?
If not, here's why.



Why do the Fibonacci numbers appear as the number of rabbits in the field each month?

If we let $f(n)$ mean "the number of pairs of rabbits in the field at the start of the n -th month", we will show that $f(1)=1$, $f(2)=1$ and $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ which is exactly the definition of the Fibonacci numbers (which also have $f(0)=0$).

First, we start month 1 with one newly born pair, so

$$f(1)=1$$

There is also 1 pair only during month 2 since they are not mature enough to have "babies" yet, so

$$f(2)=1$$

Since we assume they mate at age 2 months then a new pair is born at the start of month 3. So, after the second month, how many rabbits will there be? i.e. What is $f(n)$?

All the rabbits from the previous month (there will be $f(n-1)$ of them) survive, so there are at least $f(n-1)$ of them. How many new ones are born? Any rabbit (pair) that was alive 2 months ago is now able to produce a new pair, and we are assuming they always will and each produces only 1 new pair per month. Thus the number of newly born pairs is the same as the number of pairs 2 months ago: $f(n-2)$. Since all the rabbits were alive last month OR are newly born this month, we have:

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2) \text{ if } n>2$$

which is just the definition of the Fibonacci numbers (starting with 0 and 1).

The Rabbits problem is not very realistic, is it?

It seems to imply that brother and sisters mate, which, genetically, leads to problems. We can get round this by saying that the female of each pair mates with any male and produces another pair.

Another problem which again is not true to life, is that each birth is of exactly two rabbits, one male and one female.

από: <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>

Διάρθρωση ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (χρυσή τομή)



άλγεβρα...

η χρυσή τομή του a επιτυγχάνεται όταν: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$

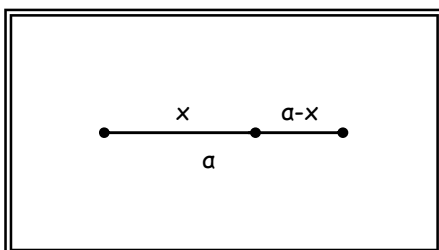
δηλαδή όταν: $x^2+ax-a^2=0$

δηλαδή όταν: $x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$

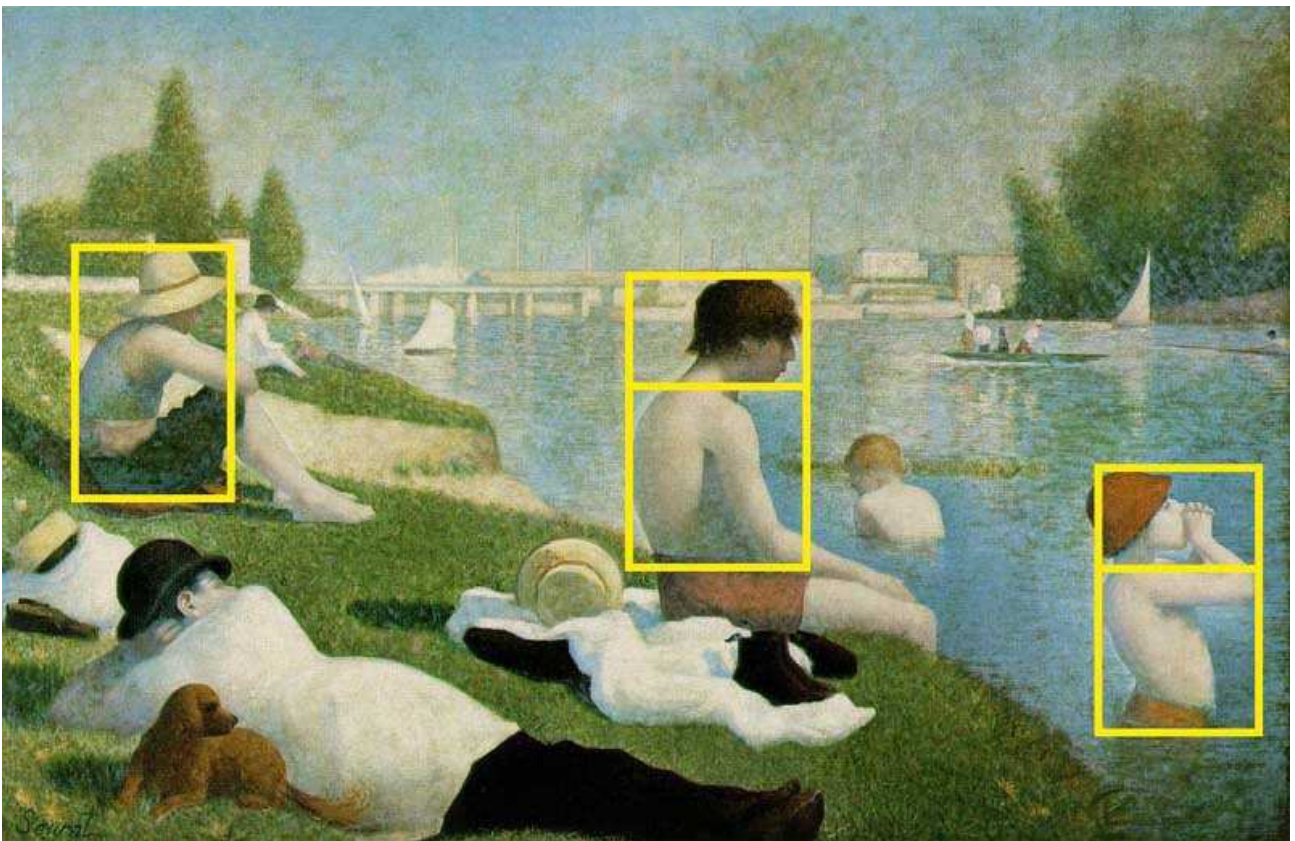
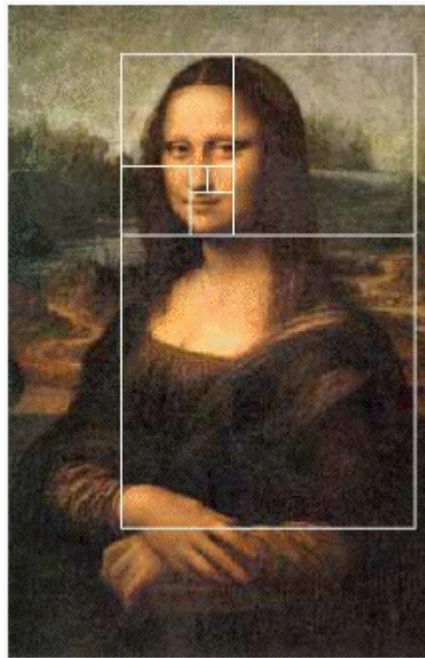
οπότε: $\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \cong 1.618033989$

και: $\varphi - 1 = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x} = \frac{1}{\varphi} \cong 0.618033989 !!$

γεωμετρία...



<http://www.sonom.gr/upload/B/golrt.html>



η χρυσή τομή στην τέχνη → <http://britton.disted.camosun.bc.ca/goldslide/jbgoldslide.htm>
και Θυμήσου, η βίκι τα ξέρει όλα... → http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio