μία προσπάθεια για τις ταυτότητες…

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(\kappa + \varphi)^2 = \kappa^2 + 2\cdot\kappa\cdot\varphi + \varphi^2$

$(3x + \mu)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot\mu + \mu^2$
$= 9x^2 + 6x\mu + \mu^2$

$(\alpha + 5y)^2 = \alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot 5y + (5y)^2$
$= \alpha^2 + 10\alpha y + 25y^2$

$(4\omega + 3\beta)^2 = (4\omega)^2 + 2\cdot 4\omega\cdot 3\beta + (3\beta)^2$
$= 16\omega^2 + 24\omega\beta + 9\beta^2$

$(2\kappa + 3\mu)^2 = \ldots\ \cdots\ \ldots\ \cdots\ \ldots$

$(5\beta + \ldots)^2 = \ldots\ \cdots\ 20\beta\ \cdots\ \ldots$

$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$(x - \theta)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot\theta + \theta^2$

$(2\kappa - \mu)^2 = (2\kappa)^2 - 2\cdot 2\kappa\cdot\mu + \mu^2$
$= 4\kappa^2 - 4\kappa\mu + \mu^2$

$(\beta - 4\varphi)^2 = \beta^2 - 2\cdot\beta\cdot 4\varphi + (4\varphi)^2$
$= \beta^2 - 8\beta\varphi + 16\varphi^2$

$(3\lambda - 2\mu)^2 = (3\lambda)^2 - 2\cdot 3\lambda\cdot 2\mu + (2\mu)^2$
$= 9\lambda^2 - 12\lambda\mu + 4\mu^2$

$(4\beta - 3\gamma)^2 = \ldots\ \cdots\ \ldots\ \cdots\ \ldots$

$(\ldots\ \cdots\ 2\kappa)^2 = \ldots\ - 12\kappa\ \cdots\ \ldots$

$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$

$\varphi^2 + 2\varphi\omega + \omega^2 = (\varphi + \omega)^2$

$4\kappa^2 + 4\kappa y + y^2 = (2\kappa)^2 + 2\cdot 2\kappa\cdot y + y^2$
$= (2\kappa + y)^2$

$\alpha^2 + 3\alpha + \frac{9}{4} = \alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$
$= \left(\alpha + \frac{3}{2}\right)^2$

$4\kappa^2 + 2\kappa + \frac{1}{4} = (2\kappa)^2 + 2\cdot 2\kappa\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$= \left(2\kappa + \frac{1}{2}\right)^2$

$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

$\beta^2 - 2\beta\nu + \nu^2 = (\beta - \nu)^2$

$9\rho^2 - 6\rho + 1 = (3\rho)^2 - 2\cdot 3\rho\cdot 1 + 1^2$
$= (3\rho - 1)^2$

$\nu^2 - \frac{2}{3}\nu + \frac{1}{9} = \nu^2 - 2\cdot\nu\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$
$= \left(\nu - \frac{1}{3}\right)^2$

$16\alpha^2 - 2\alpha + \frac{1}{16} = (4\alpha)^2 - 2\cdot 4\alpha\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$
$= \left(4\alpha - \frac{1}{4}\right)^2$

$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$(\omega + \gamma)^3 = \omega^3 + 3\omega^2\gamma + 3\omega\gamma^2 + \gamma^3$

$(2\alpha + \beta)^3 = (2\alpha)^3 + 3(2\alpha)^2\beta + 3 \cdot 2\alpha \cdot \beta^2 + \beta^3$
$= 8\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + \beta^3$

$(3\kappa + 2y)^3 = (3\kappa)^3 + 3(3\kappa)^2 2y + 3 \cdot 3\kappa(2y)^2 + (2y)^3$
$= 27\kappa^3 + 54\kappa^2 y + 36\kappa y^2 + 8y^3$

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

$x^3 - \alpha^3 = (x - \alpha)(x^2 + x\alpha + \alpha^2)$

$\kappa^3 - 125 = \kappa^3 - 5^3$
$= (\kappa - 5)(\kappa^2 + 5\kappa + 25)$

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$x^2 - \kappa^2 = (x - \kappa)(x + \kappa)$

$9\alpha^2 - \beta^2 = (3\alpha)^2 - \beta^2$
$= (3\alpha - \beta)(3\alpha + \beta)$

$4\kappa^2 - 25\nu^2 = (2\kappa)^2 - (5\nu)^2$
$= (2\kappa - 5\nu)(2\kappa + 5\nu)$

$\mu^2 - 7 = \mu^2 - (\sqrt{7})^2$
$= (\mu - \sqrt{7})(\mu + \sqrt{7})$

$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

$(\lambda - \mu)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2\mu + 3\lambda\mu^2 - \mu^3$

$(x - 2\lambda)^3 = x^3 - 3x^2 2\lambda + 3x(2\lambda)^2 - (2\lambda)^3$
$= x^3 - 6x^2\lambda + 12x\lambda^2 - 8\lambda^3$

$(5\kappa - 3\alpha)^3 = (5\kappa)^3 - 3(5\kappa)^2 3\alpha + 3 \cdot 5\kappa(3\alpha)^2 - (3\alpha)^3$
$= 125\kappa^3 - 225\kappa^2\alpha + 135\kappa\alpha^2 - 27\alpha^3$

$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

$\beta^3 + \gamma^3 = (\beta + \gamma)(\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2)$

$8 + \gamma^3 = 2^3 + \gamma^3$
$= (2 + \gamma)(4 - 2\gamma + \gamma^2)$

κι άλλες ταυτότητες...

$(A+B+\Gamma)^2 = A^2+B^2+\Gamma^2+2AB+2B\Gamma+2\Gamma A$

$(2x-3\alpha+y)^2 = (2x)^2+(-3\alpha)^2+y^2+2(2x)(-3\alpha)+2(-3\alpha)y+2y(2x)$
$= 4x^2+9\alpha^2+y^2-12\alpha x-6\alpha y+4xy$

$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = (x+\alpha)(x+\beta)$

$x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$

γιατί: $x^2 - 5x - 6 = x^2 + (1+(-6))x + 1(-6)$

κι άλλες (;) ταυτότητες...

$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$

$(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$

$A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$

$A^2 + B^2 = (A - B)^2 + 2AB$

$A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$

$A^3 - B^3 = (A - B)^3 + 3AB(A - B)$

για να αποδείξω μία ισότητα κάνω πράξεις…

	στο ένα μέλος (το πιο σύνθετο) μέχρι να καταλήξω στο άλλο	(=)
ή	σε κάθε μέλος ξεχωριστά μέχρι να καταλήξω στο ίδιο αποτέλεσμα	(=)
ή	και στα δύο μέλη ταυτοχρόνως (εφαρμόζοντας ιδιότητες πράξεων και ταυτότητες) μέχρι να καταλήξω σε μία ισότητα η οποία να είναι φανερό ότι ισχύει	(⇔)

για παράδειγμα θα αποδείξω ότι : $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) = (\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

1ος τρόπος:

$$(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2 = \alpha^2x^2+\cancel{2\alpha x\beta y}+\beta^2y^2+\alpha^2y^2-\cancel{2\alpha y\beta x}+\beta^2x^2$$
$$= \alpha^2(x^2+y^2)+\beta^2(y^2+x^2)$$
$$= (x^2+y^2)(\alpha^2+\beta^2)$$

τέλος!

2ος τρόπος:

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) = \alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2$$
$$(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2 = \alpha^2x^2+\cancel{2\alpha x\beta y}+\beta^2y^2+\alpha^2y^2-\cancel{2\alpha y\beta x}+\beta^2x^2$$

άρα : $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) = (\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

3ος τρόπος: $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) = (\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

αρκεί να δείξω ότι: $\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2 = \alpha^2x^2+\cancel{2\alpha x\beta y}+\beta^2y^2+\alpha^2y^2-\cancel{2\alpha y\beta x}+\beta^2x^2$

που ισχύει !

μία άσκηση…

θα αποδείξω ότι : **αν** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ **τότε** $\alpha=\beta=\gamma$

αν είχα 2αβ ,2βγ ,2γα το πρώτο μέλος θα μου θύμιζε ταυτότητα

γι αυτό «βλέπω» ότι: $2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha = 0$ (πολλαπλασίασα και τα 2 μέλη με 2)

δηλ. $\underline{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2} + \underline{\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2} + \underline{\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2} = 0$

δηλ. $(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 0$ (*)

αλλά είναι: $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ και $(\beta-\gamma)^2 \geq 0$ και $(\gamma-\alpha)^2 \geq 0$

συνεπώς από τη σχέση (*) συμπεραίνω ότι :

$(\alpha-\beta)^2=0$ και $(\beta-\gamma)^2=0$ και $(\gamma-\alpha)^2=0$

δηλ. $\alpha-\beta = 0$ και $\beta-\gamma = 0$ και $\gamma-\alpha = 0$

δηλ. $\alpha = \beta$ και $\beta = \gamma$ και $\gamma = \alpha$

άρα : $\alpha = \beta = \gamma$

παραγοντοποίηση πολυωνύμων…

γιατί…

- **επίλυση εξισώσεων**

$$x^2 - x = 0$$
$$x\,(x-1) = 0$$
$$x = 0 \quad ή \quad x-1 = 0$$
$$x = 0 \quad ή \quad x = 1$$

- **απλοποίηση κλασματικών αλγεβρικών παραστάσεων**

$$\frac{7\alpha - 7\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{7(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} = \frac{7}{\alpha+\beta}$$

- **εύρεση ΕΚΠ πολυωνύμων και πράξεις με κλασματικές παραστάσεις**

$$\frac{2}{x^2 - x} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2(x-1)}{x(x-1)^2} - \frac{x}{x(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x-2-x}{x(x-1)^2}$$
$$= \frac{x-2}{x(x-1)^2}$$

- **χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες**

$$A^2+B^2 \pm 2AB = (A \pm B)^2$$
$$A^3 \pm B^3 \pm 3A^2B+3AB^2 = (A \pm B)^3$$
$$A^2-B^2 = (A-B)\,(A+B)$$
$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)\,(A^2 \mp AB+B^2)$$
$$x^2 + \kappa x + \lambda = x^2 + (\,\alpha + \beta\,)x + \alpha\beta$$
$$= (\,x + \alpha\,)\,(\,x + \beta\,)$$

όπου βέβαια η «μαγκιά» είναι να βρούμε (με δοκιμές) αριθμούς α,β τέτοιους ώστε : α+β=κ και αβ=λ

$$x^2-7x+12$$
$$= x^2+(-3+(-4))x+(-3)(-4)$$
$$= (x+(-3))(x+(-4))$$
$$= (x-3)(x-4)$$

- **χρησιμοποιώντας συνδυασμό των προηγουμένων μεθόδων**

$$4(x-y)+(y-x)(\alpha+\beta)^2$$
$$= 4(x-y)-(x-y)(\alpha+\beta)^2$$
$$= (x-y)(2^2-(\alpha+\beta)^2)$$
$$= (x-y)(2-\alpha-\beta)(2+\alpha+\beta)$$

$$x^5+2x^4+x^3-27x^2-54x-27$$
$$= x^3(x^2+2x+1)-27(x^2+2x+1)$$
$$= (x+1)^2(x^3-3^3)$$
$$= (x+1)^2(x-3)(x^2+3x+9)$$

$$(x^2+y^2-\omega^2)^2-4x^2y^2$$
$$= (x^2+y^2-\omega^2)^2-(2xy)^2$$
$$= (x^2+y^2-\omega^2-2xy)(x^2+y^2-\omega^2+2xy)$$
$$= [(x-y)^2-\omega^2][(x+y)^2-\omega^2]$$
$$= (x-y-\omega)(x-y+\omega)(x+y-\omega)(x+y+\omega)$$

$$\alpha^9+\beta^9$$
$$= (\alpha^3)^3+(\beta^3)^3$$
$$= (\alpha^3+\beta^3)(\alpha^6-\alpha^3\beta^3+\beta^6)$$
$$= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha^6-\alpha^3\beta^3+\beta^6)$$

και πώς…

- **άμεσα**

$$3\omega^6-6\alpha\omega^5+3\omega^2=3\omega^2(\omega^4-2\alpha\omega^3+1)$$

- **με ομαδοποίηση**

$$\underline{\kappa^3}-\underline{\kappa^2}+\kappa-1=\kappa^2(\kappa-1)+(\kappa-1)$$
$$=(\kappa-1)(\kappa^2+1)$$

ή αλλιώς :

$$\underline{\kappa^3}-\kappa^2+\underline{\kappa}-1=\kappa(\kappa^2+1)-(\kappa^2+1)$$
$$=(\kappa^2+1)(\kappa-1)$$

ή αλλιώς :

$$\underline{\kappa^3}-\kappa^2+\kappa-\underline{1}=(\kappa-1)(\kappa^2+\kappa+1)-\kappa(\kappa-1)$$
$$=(\kappa-1)(\kappa^2+\kappa+1-\kappa)$$
$$=(\kappa-1)(\kappa^2+1)$$

το ΕΚΠ πολυωνύμων…

είναι το γινόμενο όλων των πρώτων (δηλ. αυτών που δεν παραγοντοποιούνται) παραγόντων τους , με τον μεγαλύτερο εμφανιζόμενο εκθέτη

για παράδειγμα αφού: $4x^4 - 4x^3 = 4x^3(x-1) = 2^2x^3(x-1)$

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$2x - 2 = 2(x-1)$

είναι: $ΕΚΠ\,(4x^4 - 4x^3, x^2 - 2x + 1, 2x - 2) = 2^2x^3(x-1)^2$

και οι πράξεις με κλασματικές παραστάσεις…

πολλαπλασιασμός-απλοποίηση

- $$\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^3 - \alpha} = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha^2 - 1)} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

- $$\frac{x^4 - 1}{x^2 - x}\,\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{(x^4-1)x}{(x^2-x)(x^2+1)} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)x}{x(x-1)(x^2+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

- $$\frac{\omega^2 - 4}{\omega^2 - 1}\,\frac{\omega - 1}{\omega^2 + 5\omega + 6} = \frac{(\omega-2)(\omega+2)}{(\omega-1)(\omega+1)}\,\frac{\omega-1}{(\omega+2)(\omega+3)} = \frac{\omega-2}{(\omega+1)(\omega+3)}$$

- $$\frac{\dfrac{x+1}{3x}}{x+2} = \frac{\dfrac{x+1}{1}}{\dfrac{3x}{x+2}} = \frac{(x+1)(x+2)}{3x}$$

- $$\frac{x^3+8}{x} : \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{x^3+8}{x}\;\frac{x^2-2x}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)x(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = x^2 - 2x + 4$$

αλλιώς:
$$\frac{x^3+8}{x} : \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{\dfrac{x^3+8}{x}}{\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}} = \frac{\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x}}{\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}}$$

$$= \frac{x(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= x^2 - 2x + 4$$

πρόσθεση

Θυμήσου !
σε κάθε περίπτωση
(δηλ. και χωρίς να βρεις το ΕΚΠ)
ισχύει:

$$\frac{Α}{Β} \pm \frac{Γ}{Δ} = \frac{ΑΔ \pm ΒΓ}{ΒΔ}$$

- $$\frac{α+1}{α-1} + α = \frac{α+1}{α-1} + \frac{α(α-1)}{α-1} \quad [\text{ ΕΚΠ : } α-1 \text{]}$$
  $$= \frac{α+1+α^2-α}{α-1}$$
  $$= \frac{α^2+1}{α-1}$$

- $$\frac{x-1}{x^2-4x+4} - \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{x-1}{(x-2)^2} - \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x(x-2)}$$
  $$= \frac{x(x-1)}{x(x-2)^2} - \frac{xx(x-2)}{x(x-2)^2} + \frac{x-2}{x(x-2)^2} \quad [\text{ ΕΚΠ : } x(x-2)^2 \text{]}$$
  $$= \frac{x(x-1)-x^2(x-2)+x-2}{x(x-2)^2}$$
  $$= \frac{x^2-x-x^3+2x^2+x-2}{x(x-2)^2}$$
  $$= \frac{-x^3+3x^2-2}{x(x-2)^2}$$

- $$\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{x^2-xy} = \frac{1}{(x+y)(x-y)} + \frac{1}{x(x+y)} + \frac{1}{x(x-y)} \quad [\text{ ΕΚΠ : } x(x+y)(x-y) \text{]}$$
  $$= \frac{x+(x-y)+(x+y)}{x(x+y)(x-y)}$$
  $$= \frac{3x}{x(x+y)(x-y)}$$
  $$= \frac{3}{(x+y)(x-y)}$$

- $$\frac{1}{(α-β)(α-γ)} + \frac{1}{(β-γ)(β-α)} + \frac{1}{(γ-α)(γ-β)} = \frac{1}{(α-β)(α-γ)} - \frac{1}{(β-γ)(α-β)} + \frac{1}{(α-γ)(β-γ)}$$
  $$= \frac{(β-γ)-(α-γ)+(α-β)}{(α-β)(α-γ)(β-γ)} \quad [\text{ ΕΚΠ:}(α-β)(α-γ)(β-γ) \text{]}$$
  $$= \frac{β-γ-α+γ+α-β}{(α-β)(α-γ)(β-γ)} = 0$$

✍ κι άλλες πράξεις…

- $$\left(\frac{\alpha x^2-\alpha}{x}+\alpha\right):\frac{\alpha}{x}=\frac{\alpha x^2-\alpha+\alpha x}{x}\,\frac{x}{\alpha}=\frac{\alpha(x^2-1+x)}{\alpha}=x^2+x-1$$

- $$\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}\right):\frac{1}{\kappa^2\lambda+\kappa\lambda^2}=\frac{\lambda+\kappa}{\kappa\lambda}\,\frac{\kappa\lambda(\kappa+\lambda)}{1}=(\kappa+\lambda)^2$$

- $$\frac{\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}}{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}=\frac{\dfrac{x(x-y)+y(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\dfrac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)(x+y)}}=\frac{x^2-xy+yx+y^2}{x^2+xy-yx+y^2}=1$$

- $$\frac{1+x+\dfrac{1}{x}}{x^2-\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{x+x^2+1}{x}}{\dfrac{x^3-1}{x}}=\frac{x(x+x^2+1)}{x(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x-1}$$

- $$\frac{2}{x^2-1}:\left(\frac{1}{x+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{x-\dfrac{1}{x}}\right)=\frac{2}{x^2-1}:\left(\frac{1}{\dfrac{x^2+1}{x}}+\frac{1}{\dfrac{x^2-1}{x}}\right)$$

$$=\frac{2}{x^2-1}:\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$=\frac{2}{x^2-1}:\frac{x(x^2-1)+x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2\quad 1)}$$

$$=\frac{2}{x^2-1}\,\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{2x^3}$$

$$=\frac{x^2+1}{x^3}$$

σειρά σου τώρα…

1. Χωρίς χαρτί και μολύβι…

   i. $(x-\alpha)^2=(\alpha-x)^2$ σωστό ή λάθος ;

   ii. $(-\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2$ σωστό ή λάθος ;

   iii. $(-x-y)^2=(x+y)^2$ σωστό ή λάθος ;

   iv. αν $\alpha\beta<0$ τότε η παράσταση $\alpha+\beta$ είναι διαφορά τετραγώνων σωστό ή λάθος ;

   v. οι αριθμοί $\sqrt{2}-1$ και $\sqrt{2}+1$ είναι αντίστροφοι σωστό ή λάθος ;

   vi. ο αριθμός 7121^3-7013^3 είναι πολλαπλάσιο του 9 σωστό ή λάθος ;

2. Αν για τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ να αποδείξεις ότι αυτό είναι ισόπλευρο

3. Να αποδείξεις ότι αν $x+y+z=0$ τότε: $x^2+y^2+z^2=2(y^2-xz)$

4. Να υπολογίσεις τις τιμές των παραστάσεων: $A=(\sqrt{3}+2)^2$, $B=(\sqrt{3}-2)^2$ και $\Gamma=AB$

   [απ. Γ=1]

5. Δύο αντίστροφοι αριθμοί έχουν άθροισμα $2\sqrt{5}$. Μπορείς να υπολογίσεις

   i. το άθροισμα των τετραγώνων τους

   ii. το τετράγωνο της διαφοράς τους

   iii. τη διαφορά του μικρότερου από τον μεγαλύτερο;

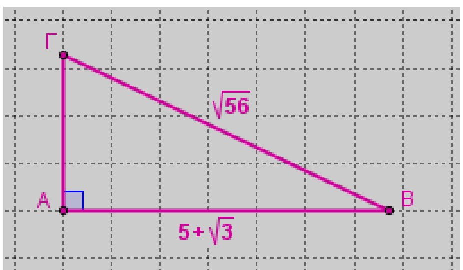
   [απ. 18, 16, 4]

6. i. δες τον αριθμό $11-4\sqrt{7}$ ως τέλειο τετράγωνο

   ii. γράψε τον αριθμό $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$ χρησιμοποιώντας μία μόνο ρίζα

   [απ. $-2+\sqrt{7}$]

7. Βρες το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος



[απ. $5-\sqrt{3}$]

8. Να γράψεις τις ακόλουθες παραστάσεις στην απλούστερη δυνατή μορφή:

i. $\sqrt{2}\,\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}$

ii. $(\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{-1+\sqrt{2}})2$

iii. $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}-(3+2\sqrt{2})$

[απ. 2, $2+2\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$]

9. Να παραγοντοποιήσεις τις ακόλουθες παραστάσεις:

i. $(7x+2y)^2+15x^2-(2x+7y)^2+15xy$

ii. $\alpha-\beta+2\sqrt{\alpha}+1$, όπου β θετικός αριθμός

iii. $x^2+2x+1-9y^2$

iv. $\alpha^3+3\alpha^2+6\alpha+8$

v. $4x^4+3x^2y^2+y^4$

vi. $\kappa^2-\lambda^2+2\kappa+4\lambda-3$

[απ. $15(x+y)(4x-3y)$, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+1)(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+1)$, $(x-3y+1)(x+3y+1)$, $(\alpha+2)(\alpha^2+\alpha+4)$, $(2x^2+y^2-x^2y^2)(2x^2+y^2+x^2y^2)$, $(\kappa+\lambda-1)(\kappa-\lambda+3)$]

10. Αν για τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ ισχύει η σχέση: $\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$ να αποδείξεις ότι αυτό είναι ισοσκελές

11. Να παραγοντοποιήσεις την παράσταση: $\alpha\beta(\beta-\alpha)+\beta\gamma(\gamma-\beta)+\gamma\alpha(\alpha-\gamma)$

[απ. $(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\gamma-\beta)$]

12. Να αποδείξεις ότι: $(x+y)^3(x-y)-(x^4-y^4)=2xy(x^2-y^2)$

13. Να αποδείξεις ότι αν $xyz=1$ τότε: $\dfrac{x}{xy+x+1}+\dfrac{y}{yz+y+1}+\dfrac{z}{zx+z+1}=1$

[υπόδειξη: είναι z=1/xy, ξεκίνα λοιπόν από το πρώτο μέλος, αντικατάστησε και κάνε πράξεις]

14. Να αποδείξεις ότι η παράσταση: $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$

έχει τιμή ανεξάρτητη των x, y, z

[υπόδειξη: αν πειράξεις λίγο τα πρόσημα θα δεις ότι οι παράγοντες στους παρονομαστές είναι 3 κι όχι 6]

✍ 15. Να γράψεις τις ακόλουθες παραστάσεις στην απλούστερη δυνατή μορφή:

i. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4-x^2}-\frac{1}{x^2-1}$

ii. $\frac{2x}{x^2-2x}-\frac{1}{x-2}+\frac{x}{x^2-4x+4}$

iii. $\frac{1}{\kappa^2-3\kappa+2}+\frac{3}{\kappa^2+\kappa-2}-\frac{1}{4-\kappa^2}$

iv. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

v. $(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3})\frac{\alpha^4-\alpha^3}{\alpha^4-1}$

vi. $\frac{\alpha^6-\beta^6}{(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2}$

vii. $[(\frac{x^2+y^2}{y}-x):(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})](\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3})$

[απ. 0, $\frac{2(x-1)}{(x-2)^2}$, $\frac{5}{(\kappa-2)(\kappa+2)}$, 4, 1, (α+β)(α-β), x]

M.C. Escher (1898–1972) Waterfall (1961)